

Математическая байга, 4 класс, решение

1. Пять мальчиков взвесились по парам во всех возможных сочетаниях. Получились веса: 90 кг, 92 кг, 93 кг, 94 кг, 95 кг, 96 кг, 97 кг, 98 кг, 100 кг и 101 кг. Чему равен вес каждого из мальчиков по отдельности?

Ответ: 44 кг, 46 кг, 48 кг, 49 кг, 52 кг.

Решение.

1) Расположим веса мальчиков по возрастанию: A, B, C, D и E .

2) Сложим все получившиеся веса:

$$90 + 92 + 93 + 94 + 95 + 96 + 97 + 98 + 100 + 101 = 956 \text{ кг.}$$

Так как каждый мальчик участвовал ровно в четырёх взвешиваниях, то

$$956 = 4(A + B + C + D + E) \Leftrightarrow A + B + C + D + E = 239.$$

3) Тогда

$$\begin{aligned} A + B &= 90 \text{ кг, } A + C = 92 \text{ кг,} \\ D + E &= 101 \text{ кг, } C + E = 100 \text{ кг.} \end{aligned}$$

4) Отсюда $A + B + D + E = 90 + 101 = 191$ кг.

5) Значит,

$$C = (A + B + C + D + E) - (A + B + D + E) = 239 - 191 = 48 \text{ кг.}$$

6) Далее получаем

$$\begin{aligned} A &= (A + C) - C = 92 - 48 = 44 \text{ кг,} \\ B &= (A + B) - A = 90 - 44 = 46 \text{ кг,} \\ E &= (C + E) - C = 100 - 48 = 52 \text{ кг,} \\ D &= (D + E) - E = 101 - 52 = 49 \text{ кг.} \end{aligned}$$

7) Итак, получаем, что веса мальчиков по отдельности равны

$$44 \text{ кг, } 46 \text{ кг, } 48 \text{ кг, } 49 \text{ кг, } 52 \text{ кг.}$$

Проверим, что эти веса удовлетворяют условию задачи:

$$\begin{aligned} 44 + 46 &= 90 \text{ кг, } 44 + 48 = 92 \text{ кг, } 44 + 49 = 93 \text{ кг, } 46 + 48 = 94 \text{ кг,} \\ 46 + 49 &= 95 \text{ кг, } 44 + 52 = 96 \text{ кг, } 48 + 49 = 97 \text{ кг, } 46 + 52 = 98 \text{ кг,} \\ 48 + 52 &= 100 \text{ кг и } 49 + 52 = 101 \text{ кг.} \end{aligned}$$

Критерии:

10 баллов – ученик дает правильный ответ и приводит полное решение без дополнительных вопросов жюри.

9 баллов – ученик дает правильный ответ и приводит полное решение только после одного-двух дополнительных вопросов жюри.

8 баллов – ученик дает правильный ответ и приводит полное решение только после нескольких дополнительных вопросов жюри.

7 баллов – ученик дает частично правильный ответ (не менее трёх правильных), но не может объяснить решение даже после нескольких вопросов жюри. Жюри объяснило решение, учащийся его понял.

6 баллов – учащийся не смог привести правильный ответ даже после нескольких вопросов жюри, но приводит идеи, которые помогают решить задачу. Жюри объяснило решение, учащийся его понял.

5 баллов – все рассуждения учащегося и ответ были неправильными. Жюри объяснило решение, учащийся его понял.

Математическая байга, 4 класс, решение

2. По кругу расположено 5 островов, на одном из них стоит замок. Между любыми двумя соседними островами построены два моста. Найдите количество маршрутов, начинающихся и заканчивающихся на острове с замком и проходящих по каждому мосту ровно один раз.

Ответ: 384.

Решение.

- 1) Каждый маршрут либо дважды обходит круг в одном и том же направлении, либо на некотором острове поворачивает назад, затем, пройдя полный круг, доходит до этого острова с другой стороны, снова разворачивается и доходит до острова с замком.
- 2) Рассмотрим маршруты первого типа.
Сначала выбирается направление обхода (2 способа). Выходя из каждого острова, мы выбираем мост (2 способа для каждого острова), но только на первом круге. На втором круге мост определяется однозначно, так как один мост уже использовался. Всего $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$ варианта.
- 3) Рассмотрим маршруты второго типа.
Сначала выбираем направление (2 способа). Затем выбираем, на каком острове развернёмся (5 способов). Далее выбираем, какой мост из каждой пары мостов будем обходить первым (по 2 способа для каждой пары мостов). Итак, количество маршрутов второго типа равно $2 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 320$.
- 4) Количество всех маршрутов равно $64 + 320 = 384$.

Критерии:

10 баллов – ученик дает правильный ответ, приводит полное решение без дополнительных вопросов жюри.

9 баллов – ученик дает правильный ответ, приводит полное решение только после одного-двух дополнительных вопросов жюри.

8 баллов – ученик дает правильный ответ, приводит полное решение только после нескольких дополнительных вопросов жюри.

7 баллов – ученик дает правильный ответ, но не приводит правильного решения даже после нескольких наводящих вопросов жюри. Жюри объяснило решение, учащийся его понял.

6 баллов – ученик даёт неправильный ответ, но имеется существенное продвижение (правильно рассмотрел какие-то случаи), но даже после нескольких вопросов жюри не может привести ни правильный ответ, ни решение. Жюри объяснило решение, учащийся его понял.

5 баллов – все рассуждения учащегося и ответ были неправильными. Жюри объяснило решение, учащийся его понял.

Математическая байга, 4 класс, решение

3. Имеется 5 монет, каждая из которых весит 15 г или 16 г, и весы с одной чашкой, которые показывают суммарный вес груза, положенного на чашку. Покажите, как за 4 взвешивания узнать вес каждой монеты.

Решение. Обозначим наши монеты как A, B, C, D и E .

1) Первым взвешиванием положим на весы монеты $ABCD$. Пусть их суммарный вес равен S_1 .

2) Вторым взвешиванием положим на весы монеты $ABCE$. Обозначим их суммарный вес через S_2 .

Случай А. Пусть $S_1 > S_2$, тогда вес монеты D больше веса монеты E . Отсюда получаем, что вес монеты D равен 16 г, а вес монеты E равен 15 г. Более того, теперь мы знаем суммарный вес монет ABC . Третьим взвешиванием находим вес монеты A , четвёртым – монеты B , а вес монеты C определяется автоматически.

Случай В. Если $S_1 < S_2$, то рассматриваем аналогично случаю А, только уже вес монеты D будет 15 г., а монеты E – 16 г.

Случай С. Пусть оказалось, что $S_1 = S_2$, тогда веса монет D и E равны. Третьим взвешиванием взвешиваем ADE . Если общий вес этих монет чётный, то вес монеты A тоже чётный, то есть равен 16 г., в противном случае вес монеты A равен 15 г. Более того, по этой информации легко вычисляем веса монет D и E . Четвёртым взвешиванием взвешиваем монету B . Теперь легко вычислить вес монеты C .

Критерии:

10 баллов – ученик дает правильный ответ, приводит полное решение без дополнительных вопросов жюри.

9 баллов – ученик дает правильный ответ, приводит полное решение только после одного-двух дополнительных вопросов жюри.

8 баллов – ученик дает правильный ответ, приводит полное решение только после нескольких дополнительных вопросов жюри.

7 баллов – ученик дает правильный ответ, но не приводит правильного решения даже после нескольких наводящих вопросов жюри. Жюри объяснило решение, учащийся его понял.

6 баллов – ученик даёт неправильный ответ, но имеется существенное продвижение (правильно рассмотрел какие-то случаи), но даже после нескольких вопросов жюри не может привести ни правильный ответ, ни решение. Жюри объяснило решение, учащийся его понял.

5 баллов – все рассуждения учащегося и ответ были неправильными. Жюри объяснило решение, учащийся его понял.

Математическая байга, 4 класс, решение

4. Даурен и Айгуль играют в такую игру. Имеется кучка из 25 камней. За один ход можно взять из любой кучки любое количество камней, которое является делителем числа камней в этой кучке, и создать отдельную кучку. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Первый ход делает Айгуль. Кто выиграет при правильной игре? Объясните, как этот игрок должен действовать, чтобы гарантировать себе победу.

Ответ: Айгуль.

Решение.

- 1) Даурен первым ходом делит кучку на две части. Одна кучка обязательно будет содержать чётное количество камней, а другая – нечётное.
- 2) Айгуль делит кучку с чётным числом камней на две равные кучки.
- 3) В дальнейшем, если Даурен делит кучку с нечётным числом песчинок на нечет+чёт, то Айгуль делит чёт пополам. А если Даурен делает ход на одной из равных половинок, то Айгуль делает такой же ход на второй половинке. Таким образом, у Айгуль всегда есть возможность хода.
- 4) Но число ходов конечно. Поэтому Айгуль выигрывает.

Для жюри: Прежде, чем принимать решение, сыграйте с учеником в эту игру три раза, после этого ученик может рассказать своё решение.

Критерии:

10 баллов – ученик даёт правильный ответ, выигрывает у жюри три раза и объясняет выигрышную стратегию без дополнительных вопросов жюри.

9 баллов – ученик даёт правильный ответ, выигрывает у жюри три раза и объясняет выигрышную стратегию только после одного-двух дополнительных вопросов жюри.

8 баллов – ученик даёт правильный ответ, выигрывает у жюри хотя бы два раза и объясняет выигрышную стратегию только после нескольких дополнительных вопросов жюри.

7 баллов – ученик даёт правильный ответ, выигрывает у жюри хотя бы два раза, но не может объяснить, какой должна быть выигрышная стратегия Кайрата даже после нескольких дополнительных вопросов жюри. Жюри объяснило решение, учащийся его понял.

6 баллов – ученик даёт правильный ответ, выигрывает у жюри хотя бы один раз, но не может объяснить, какой должна быть выигрышная стратегия Кайрата даже после нескольких дополнительных вопросов жюри. Жюри объяснило решение, учащийся его понял.

5 баллов – учащийся не может выиграть у жюри. Жюри объяснило решение, учащийся его понял.

Математическая байга, 4 класс, решение

5. Пять гномов Бу, Му, Лу, Шу и Ду играли в настольный теннис пара на пару, причём каждая пара сыграла с каждой ровно один раз. В результате Бу проиграл 12 игр, а Ду – 6. Сколько игр выиграл Лу, если по правилам настольного тенниса игра не может окончиться ничьей?

Ответ: 8 игр.

Решение.

- 1) Когда один из игроков отдыхает, остальные могут разбиться на пары тремя способами. Значит, всего игр было сыграно $5 \cdot 3 = 15$.
- 2) Каждый игрок не принимал участие ровно в 3 играх, значит, каждый сыграл ровно $15 - 12 = 3$ игр.
- 3) Бу проиграл 12 игр, значит, он не выиграл ни одной.
- 4) Ду, играя в паре с Бу, проиграл три игры против пар парам Лу – Му, Лу – Шу и Шу – Му. И выиграл две игры вместе с Му против пар, где участвовал Бу (Бу – Лу, Бу – Шу). Вместе с Лу выиграл две игры, соответственно, против пар Бу – Му и Бу – Шу. Также вместе с Шу он выиграл две партии, играя против пар Бу – Лу и Бу – Му. Осталось три партии, которые он проиграл, так как всего он проиграл 6 партий.
- 5) Учитывая пункты 4 – 5 составим таблицу игр, в которых принял участие Ду (всего 12 игр)

№	Пара, где играет Ду	Противники	Результат для Ду	№	Пара, где играет Ду	Противники	Результат для Ду
1	Ду – Бу	Лу – Му	Проиграл	7	Ду – Лу	Бу – Му	Выиграл
2	Ду – Бу	Лу – Шу	Проиграл	8	Ду – Лу	Бу – Шу	Выиграл
3	Ду – Бу	Шу – Му.	Проиграл	9	Ду – Лу	Му – Шу.	Проиграл
4	Ду – Му	Бу – Лу	Выиграл	10	Ду – Шу	Бу – Лу	Выиграл
5	Ду – Му	Бу – Шу	Выиграл	11	Ду – Шу	Бу – Му	Выиграл
6	Ду – Му	Лу – Шу.	Проиграл	12	Ду – Шу	Лу – Му	Проиграл

- 6) Из пунктов 4 – 6 можем составить таблицу игр, в которых участвовал Лу.

№	Пара, где играет Лу	Противники	Результат для Лу	№	Пара, где играет Лу	Противники	Результат для Лу
1	Лу – Бу	Му – Шу	Проиграл	7	Лу – Ду	Бу – Му	Выиграл
2	Лу – Бу	Ду – Шу	Проиграл	8	Лу – Ду	Му – Шу	Проиграл
3	Ду – Бу	Шу – Му	Проиграл	9	Лу – Ду	Шу – Бу	Выиграл
4	Лу – Му	Ду – Шу	Выиграл	10	Лу – Шу	Бу – Ду	Выиграл
5	Лу – Му	Шу – Бу	Выиграл	11	Лу – Шу	Ду – Му	Выиграл
6	Лу – Му	Бу – Ду	Выиграл	12	Лу – Шу	Му – Бу	Выиграл

- 7) Как видно из таблицы, Лу выиграл 8 игр.

Математическая байга, 4 класс, решение

Критерии:

10 баллов – ученик дает правильный ответ на оба вопроса и приводит полное решение без дополнительных вопросов жюри.

9 баллов – ученик дает правильный ответ на оба вопроса и приводит полное решение только после одного-двух дополнительных вопросов жюри.

8 баллов – ученик дает правильный ответ на оба вопроса и приводит полное решение только после нескольких дополнительных вопросов жюри.

7 баллов – ученик дает правильный ответ хотя бы на один вопрос, но только для одного вопроса может объяснить как ответ на него получен, даже после нескольких наводящих вопросов жюри.

6 баллов – ученик приводит правильный ответ хотя бы на один из поставленных вопросов ответ, но не может объяснить, как он его получил, даже после нескольких вопросов жюри.

5 баллов – все рассуждения учащегося и ответ были неправильными. Жюри объяснило решение, учащийся его понял.